M. CARAMIA, S. GIORDANI, F. GUERRIERO, R. MUSMANNO, D. PACCIARELLI
**RICERCA OPERATIVA**
Isedi

## Esercizi proposti nel Cap. 5 - Soluzioni

### Esercizio 5.1

- La norma Euclidea di $v$ è $\|v\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} v_j^2} = \sqrt{9+0+16} = 5$
- Il versore corrispondente a $v$ è $[{}^{3}/_{5} \;\; 0 \;\; {}^{4}/_{5}]^T$
- Il prodotto scalare tra $v$ e $w$ è $v^T w = [3 \;\; 0 \;\; 4]^T \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ k \end{bmatrix} = 12 + 4k$. La condizione di ortogonalità richiede che il prodotto scalare sia nullo, per cui $k = -3$

### Esercizio 5.2

- $p = 2v^{(1)} + 3v^{(2)} - v^{(3)} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3+2 \\ -6+3-4 \\ -4+6-2 \\ 0-15-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \\ 0 \\ -22 \end{bmatrix}$
- I tre vettori sono linearmente dipendenti se esistono tre scalari $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutti nulli tali che $\lambda_1\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix} + \lambda_3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Per verificarne l'esistenza è sufficiente risolvere il sistema: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -5\lambda_2 + 7\lambda_3 = 0 \end{cases}$ che ammette l'unica soluzione $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, pertanto i tre vettori sono linearmente indipendenti.

### Esercizio 5.3

Attraverso lo sviluppo per colonna sulla prima colonna di A si ha:

$$\det A = 2 \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & 7 & 4 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 5 \\ -6 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

Sviluppando ancora per colonna sulla prima colonna della prima matrice e sulla seconda della seconda matrice si ottiene:

$$\det A = 4 \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} - 6 \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} -12 \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} -7 \det \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Sviluppando ancora per colonna sulla prima colonna di ciascuna matrice si ottiene:

$$\det A = 8 \det [4] - 28 \det [-2] -6 \det [4] +42 \det [5] -12 \det [-2] +24 \det [5] +3 \det [4] +6 \det [-2] -21 \det [5] +14 \det [-2] = 285$$

**Esercizio 5.4**

Per determinare la matrice inversa, si costruisce la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si effettua un'operazione di pivot sull'elemento in posizione (1,1) ottenendo la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché l'elemento in posizione (2,2) è nullo si scambia la riga 2 con una riga $i > 2$ avente un elemento in colonna 2 diverso da zero, quindi si scambia la riga 2 con la riga 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi si effettua un'operazione di pivot sull'elemento in posizione (2,2) ottenendo la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi si effettua un'operazione di pivot sull'elemento in posizione (3,3) ottenendo la matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha pertanto:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1/3 & -2/3 & 1 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

**Esercizio 5.5**

$$C = AB^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \\ -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 6 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$D = BA^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -4 & 1 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & 7 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Le matrici $C$ e $D$ sono l'una la trasposta dell'altra, come d'altra parte è evidente dalla loro definizione.

**Esercizio 5.6**

Data una matrice $A$ $(m \times n)$ l'algoritmo di Gauss-Jordan effettua in successione delle operazioni di pivot sull'elemento $a_{hh}$, per $h$=1,…,$m$. Quando l'elemento in posizione ($h$,$h$) è nullo, l'algoritmo cerca di scambiare la riga $h$ con una riga $i > h$ avente un elemento in colonna $h$ diverso da zero. Se tutti gli elementi della colonna $h$, dalla riga $h$ alla riga $m$, sono uguali a zero, si ha che la colonna $h$ è linearmente dipendente delle prime $h$-1 colonne di $A$. A questo punto si può cancellare la colonna $h$ e proseguire l'esecuzione dell'algoritmo dalla colonna successiva. Procedendo in questo modo fino ad esaurimento delle colonne di $A$, si ha che il numero di colonne rimaste coincide con il massimo numero di colonne di $A$ linearmente indipendenti, cioè con il rango della matrice $A$.

**Esercizio 5.7**

La matrice ha rango 3 per tutti i valori di $k$ tali che det $A \neq 0$. Poiché det $A = 2 + k^2 - 7k$, si ha che $A$ ha rango 3 per $k \neq \frac{7\pm\sqrt{41}}{2}$. Per questi due valori il rango di $A$ è pari a 2, in quanto (ad esempio) la seconda e terza colonna di $A$ sono linearmente indipendenti per ogni $k$.

**Esercizio 5.8**

Rappresentando graficamente il poliedro P e le due direzioni si ha la rappresentazione in Figura 1 (in terzultima pagina).

Le direzioni estreme di P sono date dai due versori $d^{(3)} = [0 \ \ 1]^T$ e $d^{(4)} = \left[{}^{3}\!/\!\sqrt{10} \quad {}^{1}\!/\!\sqrt{10}\right]^T$ mentre i vertici del poliedro sono i punti $v^{(1)} = [0 \ \ 3]^T$ e $v^{(2)} = [3 \ \ 0]^T$.

Si ha pertanto che $d^{(1)}$ e $d^{(2)}$ (i versori associati) sono direzioni del poliedro, essendo:
$d^{(1)} = \frac{6-\sqrt{2}}{3} d^{(3)} + \frac{\sqrt{20}}{3} d^{(4)}$ e $d^{(2)} = \frac{8}{3} d^{(3)} + \frac{\sqrt{10}}{3} d^{(4)}$.

Poiché $\bar{x} \in P$, dal Teorema 5.4 si ha: $\bar{x} = \lambda_1 v^{(1)} + \lambda_2 v^{(2)} + \mu_3 d^{(3)} + \mu_4 d^{(4)}$, con $\lambda, \mu \geq 0$ e $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Sostituendo le coordinate dei 5 vettori e risolvendo il sistema nelle variabili $\lambda, \mu$ si ottiene, ad esempio, la soluzione ammissibile $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_3 = 2$, $\mu_4 = 0$.

**Esercizio 5.9**

$$\begin{cases} 2(x_1^+ - x_1^-) - 3x_2^- - x_3 + x_4^+ - x_4^- - x_5 = 5 \\ x_1^+ - x_1^- + 2x_2^- - 2(x_4^+ - x_4^-) + x_6 = 0 \\ -(x_1^+ - x_1^-) - 2x_2^- + 3x_3 - (x_4^+ - x_4^-) = 3 \\ x_1^+, x_1^-, x_2^-, x_3, x_4^+, x_4^-, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

**Esercizio 5.10**

Per risolvere il problema è sufficiente esplicitare le equazioni rispetto alle variabili in base, ad esempio premoltiplicando la matrice dei coefficienti $A$ e il vettore dei termini noti $b$ per la matrice $A_B^{-1}$:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}2\\2\\3\end{bmatrix} \qquad A_B=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad A_B^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad A_N=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

Ponendo $x_B = \begin{bmatrix}x_2\\x_3\\x_1\end{bmatrix}$, $x_N = [x_4]$, il sistema in forma canonica rispetto a *B* è: $x_B + A_B^{-1}A_N x_N = A_B^{-1}b$

Si ha il poliedro equivalente in forma canonica rispetto a *B*: $\begin{cases} x_2 - x_4 = 3\\ x_3 = 1\\ x_1 - x_4 = 2\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0\end{cases}$.

**Esercizio 5.11**

Il lemma 5.1 fornisce una condizione necessaria e sufficiente affinché $\bar{x}$ sia vertice, e cioè che le colonne associate alle variabili con valore diverso da zero siano fra loro linearmente indipendenti. Quindi, data la matrice dei coefficienti $A = \begin{bmatrix}6 & -3 & -3\\ 3 & 2 & -4\end{bmatrix}$, $\bar{x}$ è vertice se e solo se i vettori $A_1 = \begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix}-3\\-4\end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti.

Evidentemente ciò non può essere in quanto il rango di *A* non può essere 3. Tuttavia è utile cercare una combinazione lineare dei tre vettori $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3 = 0$, ad esempio fissando $\alpha_1 = 1$ da cui si ricava $\alpha_2 = {}^5/_6$ e $\alpha_3 = {}^7/_6$. I due punti $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ si possono ottenere scegliendo un $\varepsilon \leq {}^6/_7$ e fissando $x^{(1)} = \bar{x} + \varepsilon\alpha$ e $x^{(1)} = \bar{x} - \varepsilon\alpha$. Scegliendo $\varepsilon = {}^6/_7$ si ha:

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{6}{7}\begin{bmatrix}1\\ {}^5/_6\\ {}^7/_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^{20}/_7\\ {}^{12}/_7\\ 2\end{bmatrix},\ x^{(2)} = \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{6}{7}\begin{bmatrix}1\\ {}^5/_6\\ {}^7/_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}{}^8/_7\\ {}^2/_7\\ 0\end{bmatrix}.$$

I due punti soddisfano il sistema

$$\begin{cases}6x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 6\\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4\\ x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{cases}$$

E sono tali che $\bar{x} = \frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}$.

**Esercizio 5.12**

Per risolvere il problema è sufficiente esplicitare le equazioni rispetto alle variabili in base, ad esempio premoltiplicando la matrice dei coefficienti *A* e il vettore dei termini noti *b* per la matrice $A_B^{-1}$:

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 6 & 2\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}5\\11\end{bmatrix} \qquad A_B=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 6\end{bmatrix}$$

Poiché det $A_B$ =0, ed il rango di *A* è pari a 2, l'insieme di indici *B*={1, 2} non individua una base di *A* e pertanto non è possibile costruire il poliedro equivalente in forma canonica rispetto a *B*.

**Esercizio 5.13**

Rappresentando graficamente il poliedro *P* (vedi Figura 2 in penultima pagina) si ottengono i 4 vertici:

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, v^{(2)} = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}, v^{(3)} = \begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, v^{(4)} = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}.$$

Per ricavare il numero delle basi è necessario portare $P$ in forma standard aggiungendo 4 variabili di scarto:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 \\ x_2 + x_6 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

Per il Teorema 5.6 il politopo in forma standard conterrà 4 SBA, ciascuna associata ad un vertice. Si noti che ciascuno dei 6 vincoli del problema iniziale, quando è soddisfatto all'uguaglianza, genera una retta sul piano $\mathfrak{R}^2$ caratterizzata dal fatto che una delle 6 variabili in forma standard è uguale a zero (evidenziata in figura accanto alla retta). Le basi possibili sono associate a tutte le possibili scelte di 4 colonne linearmente indipendenti della matrice dei coefficienti (e a porre fuori base e quindi a zero due delle 6 variabili):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si hanno $\binom{6}{4} = 15$ combinazioni di 6 elementi di classe 4 che costituiscono un limite superiore al numero di tutte le possibili basi, in effetti a queste vanno sottratte tutte le combinazioni che non danno luogo a una base, in particolare va esclusa solo la combinazione associata all'insieme di indici di base $B$={1,3,4,5} in corrispondenza del quale si ha $\det A_B = 0$. Si hanno pertanto 14 basi. Calcolando per ciascuna di queste il vettore $x_B = A_B^{-1}b$ si trovano 4 basi ammissibili (tali che $A_B^{-1}b \geq 0$, associate ai 4 vertici $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$, $v^{(4)}$) e 10 non ammissibili. Ciascuna base corrisponde a un punto dello spazio $\mathfrak{R}^2$ dato dall'intersezione delle due rette associate alle due variabili fuori base.

Le 4 basi ammissibili sono associate ai 4 vertici del poliedro, alle 4 SBA e agli insiemi di indici:
$v^{(1)}$: $B$={3,4,5,6} $N$={1,2} SBA: $x^{(1)} = [0\ \ 0\ \ 4\ \ 2\ \ 10\ \ 5]^T$
$v^{(2)}$: $B$={2,4,5,6} $N$={1,3} SBA: $x^{(2)} = [0\ \ 4\ \ 0\ \ 6\ \ 2\ \ 1]^T$
$v^{(3)}$: $B$={1,2,5,6} $N$={3,4} SBA: $x^{(3)} = [3\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 5\ \ 4]^T$
$v^{(4)}$: $B$={1,3,5,6} $N$={2,4} SBA: $x^{(4)} = [2\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ 8\ \ 5]^T$

Si noti che nessuna SBA è degenere (cioè per le 4 basi $A_B^{-1}b > 0$).

Le 10 basi non ammissibili sono associate ai punti $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$, $y^{(5)}$, $y^{(6)}$, $y^{(7)}$ , $y^{(8)}$ e agli insiemi di indici:
$y^{(1)}$: $B$={2,3,5,6} $N$={1,4}
$y^{(2)}$: $B$={2,3,4,6} $N$={1,5} oppure $B$={2,3,4,5} $N$={1,6} oppure $B$={1,2,3,4} $N$={5,6}
$y^{(3)}$: $B$={1,2,3,6} $N$={4,5}
$y^{(4)}$: $B$={1,4,5,6} $N$={2,3}
$y^{(5)}$: $B$={1,3,4,6} $N$={2,5}
$y^{(6)}$: $B$={1,2,3,5} $N$={4,6}
$y^{(7)}$: $B$={1,2,4,5} $N$={3,6}
$y^{(8)}$: $B$={1,2,4,6} $N$={3,5}

**Esercizio 5.14**

Rappresentando graficamente il poliedro P (vedi Figura 3 in ultima pagina) si ottengono i 4 vertici:

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, v^{(2)} = \begin{bmatrix}20/9\\70/9\end{bmatrix}, v^{(3)} = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix}, v^{(4)} = \begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}.$$

Pertanto 4 è il numero delle SBA del corrispondente sistema in forma standard:

$$\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_5 = 15 \\ x_1 + x_6 = 5 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

In particolare, ciascuna SBA è associata a un vertice:

$x^{(1)} = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 10 \;\; 15 \;\; 5]^T$ associata a $v^{(1)}$
$x^{(2)} = [20/9 \;\; 70/9 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 325/9 \;\; 25/9]^T$ associata a $v^{(2)}$
$x^{(3)} = [5 \;\; 5 \;\; 25 \;\; 0 \;\; 25 \;\; 0]^T$ associata a $v^{(3)}$
$x^{(4)} = [5 \;\; 0 \;\; 35 \;\; 5 \;\; 0 \;\; 0]^T$ associata a $v^{(4)}$

Una SBA per la quale la variabile ausiliaria introdotta nel secondo vincolo di $P$ è di base è una SBA per la quale la variabile $x_4$ è variabile di base, quindi $x^{(1)}$ e $x^{(4)}$ sono le sole SBA con questa caratteristica.

Sempre $x^{(1)}$ e $x^{(4)}$ sono due SBA degeneri, in quanto il numero di variabili uguali a zero (3) è strettamente superiore al numero di variabili fuori base (2), quindi una variabile di base dovrà necessariamente essere uguale a zero.

Le 4 SBA sono associate a 8 basi ammissibili come segue:

$x^{(1)}$: $B^{(1)}$={3,4,5,6} $N$={1,2} oppure $B^{(2)}$={2,4,5,6} $N$={1,3} oppure $B^{(3)}$={1,4,5,6} $N$={2,3}
$x^{(2)}$: $B^{(4)}$={1,2,5,6} $N$={3,4}
$x^{(3)}$: $B^{(5)}$={1,2,3,5} $N$={4,6}
$x^{(4)}$: $B^{(6)}$={1,3,4,5} $N$={2,6} oppure $B^{(7)}$={1,3,4,6} $N$={2,5} oppure $B^{(8)}$={1,2,3,4} $N$={5,6}

Altre 6 basi sono non ammissibili mentre l'insieme di indici $B$={2,3,4,5} non corrisponde a una base in quanto $\det A_B = 0$. Si noti che le due variabili fuori base ($x_1$ e $x_6$) sono associate a due rette parallele.

**Esercizio 5.15**

La matrice dei coefficienti ha $n = 3$ colonne e $m = 2$ righe.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Un limite superiore al numero di soluzioni di base è dato dal numero di basi possibili della matrice $A$, ovvero il numero $\binom{n}{m} = 3$ di combinazioni di $n$ elementi di classe $m$. Infatti una base è associata a una scelta di 2 delle 3 colonne disponibili. Il numero esatto può essere inferiore in quanto qualche combinazione di $m$ colonne potrebbe non dar luogo a una base o, in caso di basi degeneri, più basi potrebbero essere associate a una stessa soluzione di base. Per determinare tutte le soluzioni di base è pertanto necessario calcolare esplicitamente il vettore $x_B = A_B^{-1}b$ per ciascuna base. Per le 3 combinazioni di indici di base si ha:

$B^{(1)}$={12} $\Rightarrow A_{B^{(1)}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$; $\det A_{B^{(1)}} = -11$; $A_{B^{(1)}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/11 & 4/11 \\ 2/11 & -3/11 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{B^{(1)}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42/11 \\ -4/11 \end{bmatrix}$

$B^{(2)}$={13} $\Rightarrow A_{B^{(2)}} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $\det A_{B^{(2)}} = 0$. A questo insieme di indici non corrisponde una base.

$B^{(3)}$={23} $\Rightarrow A_{B^{(3)}} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$; $\det A_{B^{(3)}} = 22$; $A_{B^{(3)}}^{-1} = \begin{bmatrix} 4/22 & -6/22 \\ 1/22 & 4/22 \end{bmatrix} \Rightarrow x_{B^{(3)}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/11 \\ 21/11 \end{bmatrix}$

Quindi il sistema ammette due soluzioni di base:

$x^{(1)} = [42/11 \quad -4/11 \quad 0]^T$
$x^{(2)} = [0 \quad -4/11 \quad 21/11]^T$

Si noti che nessuna delle due soluzioni di base è ammissibile. Dal Teorema 5.6 si deduce pertanto che il poliedro $P$ non contiene alcun vertice e quindi, per il Teorema 5.5, $P$ è vuoto.

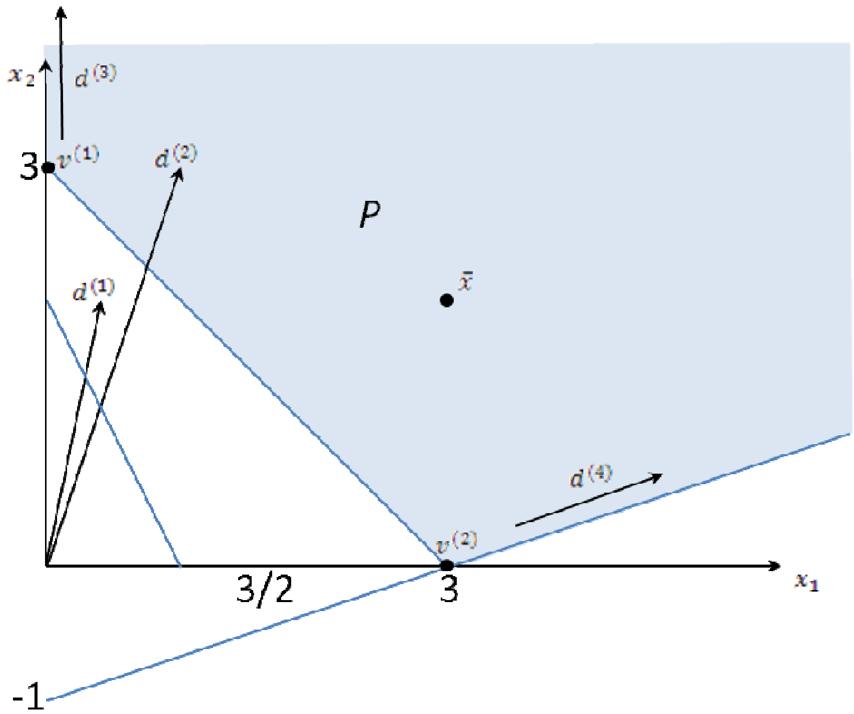


Figura 1: il poliedro dell'esercizio 5.8

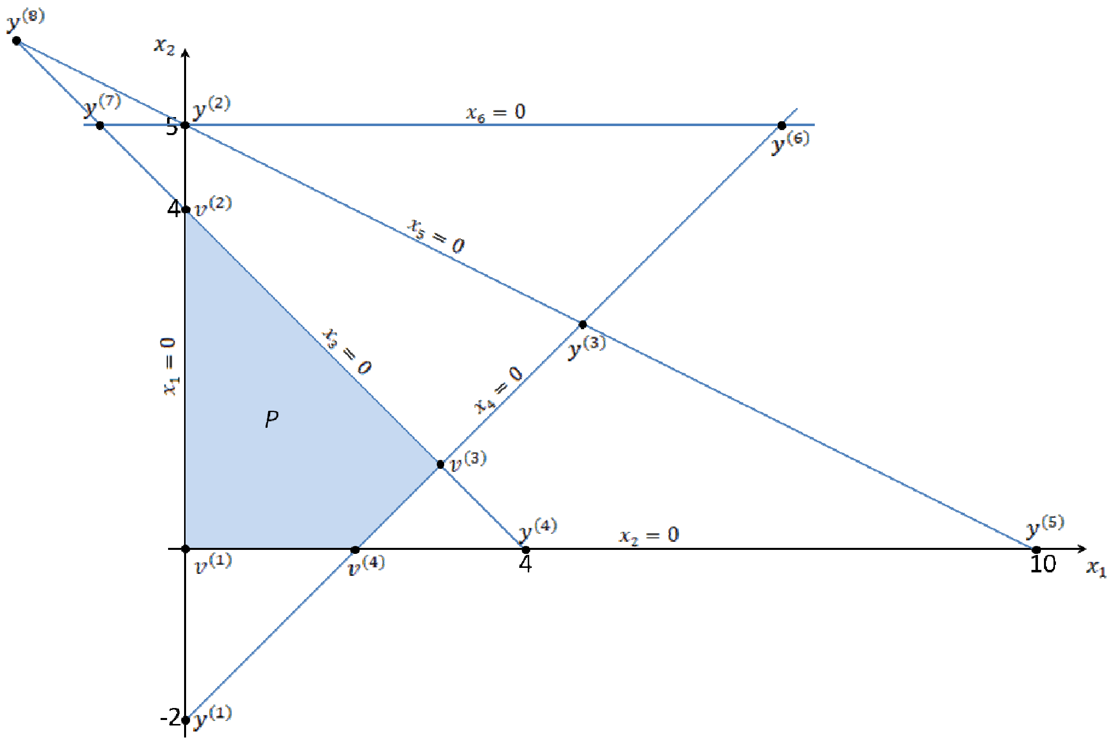


**Figura 2: il poliedro dell'esercizio 5.13**

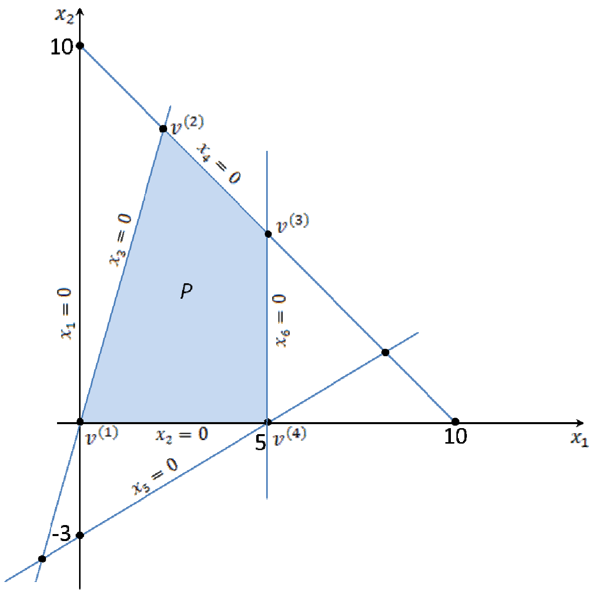


**Figura 3: il poliedro dell'esercizio 5.14**